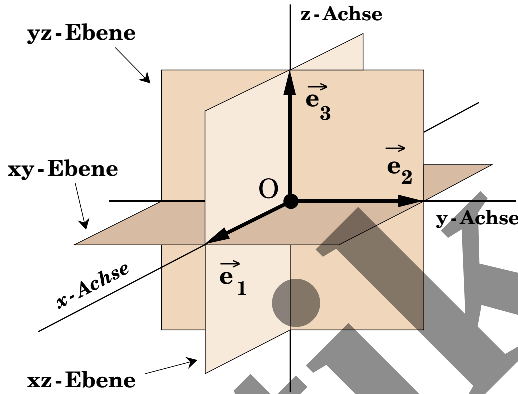
C. VEKTOREN UND PUNKTE IM KOORDINATENSYSTEM

C1. KOORDINATENSYSTEM

Definition. Ein *orthonormiertes Rechtssystem*, kurz *Koordinatensystem* , besteht aus einem festen Punkt O, dem *Ursprung*, und drei nummerierten, nicht komplanaren Vektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$, den *Basisvektoren*, die folgende drei Bedingungen erfüllen:



– Ihre Repräsentanten mit Anfangspunkt O stehen *paarweise senkrecht* aufeinander ('ortho').
– Ihre Beträge sind je 1, d.h. es sind sogenannte *Einheitsvektoren* ('normiert').
– Ihre Orientierung entspricht jener der drei gespreizten Finger Daumen ($\vec{e}_1$), Zeigefinger ($\vec{e}_2$) und Mittelfinger ($\vec{e}_3$) der rechten Hand.
  Man sagt: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bilden in dieser Reihenfolge ein *Rechtssystem*.

Die drei Repräsentanten $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ legen drei durch O gehende Koordinatenachsen fest: die *x-Achse*, *y-Achse* und *z-Achse*. Je zwei Achsen bestimmen eine Koordinatenebene: die *xy-Ebene*, *yz-Ebene* und *xz-Ebene*.

Allen nachfolgenden Betrachtungen liegt stets ein Koordinatensystem mit den obgenannten Eigenschaften und Bezeichnungen zugrunde.

C2. KOMPONENTENDARSTELLUNG VON VEKTOREN

Aufgrund des Satzes in B4 (Seite 6) ist jeder Vektor $\vec{v}$ eine Linearkombination der Basisvektoren: $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

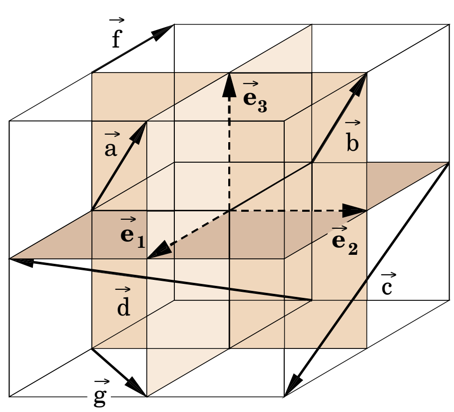
Definition. Die Koeffizienten x, y, z der Linearkombination $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ heissen die *Komponenten* von $\vec{v}$. Man schreibt abgekürzt $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ und spricht von der *Komponentendarstellung* von $\vec{v}$.

(Nochmals: Die Komponenten x, y und z bedeuten die 'Ausdehnungen' von $\vec{v}$ in Richtung von $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ bzw. $\vec{e}_3$.)

Für die Basisvektoren gilt speziell: $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$.

<u>Beispiel</u> *Komponenten von Vektoren*

Nenne die Komponentendarstellungen der im nebenstehenden Koordinatensystem repräsentierten Vektoren:



$\vec{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$

Mathematik

C3. Rechnen mit Komponenten

Nullvektor $\vec{o} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$

Beweis: $\vec{o} = 0\,\vec{e}_1 + 0\,\vec{e}_2 + 0\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$

Gegenvektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$

Beweis: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \Leftrightarrow -\vec{a} = -(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)$

Durch Umformen: $-\vec{a} = (-a_1)\,\vec{e}_1 + (-a_2)\,\vec{e}_2 + (-a_3)\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$

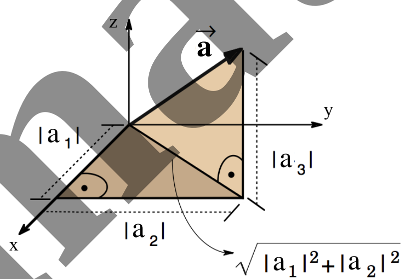
Betrag $|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Beweis: $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2}\right)^2 + |a_3|^2}$

$= \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + |a_3|^2}$

$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

(zweimal Satz von Pythagoras)



Beispiel *Betrag von Vektoren*

Berechne: $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = \dots\dots$, $\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \dots\dots$, $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \dots\dots$

Überlege: $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \dots\dots$ usw.

Addition und Subtraktion $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

Beweis: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \pm (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$

$= (a_1 \pm b_1)\,\vec{e}_1 + (a_2 \pm b_2)\,\vec{e}_2 + (a_3 \pm b_3)\,\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl $x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x a_1 \\ x a_2 \\ x a_3 \end{pmatrix}$

Beweis: $x\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Mathematik

C4. KOORDINATENDARSTELLUNG VON PUNKTEN

Bei der Definition des Koordinatensystems haben wir den Ursprung O eingeführt. Für die Komponentendarstellung von Vektoren wäre dies nicht nötig, da Vektoren nicht 'ortsgebunden' sind. Für die Koordinatendarstellung von Punkten ist jedoch der Ursprung O unerlässlich.

Zwischen Vektoren und Punkten besteht eine umkehrbar eindeutige Zuordnung, die bei der nachfolgenden Definition der Koordinatendarstellung von Punkten benützt wird. Ist ein Vektor durch den Pfeil repräsentiert, der vom Ursprung O ausgeht (O ist Anfangspunkt), und bezeichnet P die Pfeilspitze (P ist Endpunkt), so lässt sich diese Zuordnung wie folgt schreiben:

$$\text{Vektor } \overrightarrow{OP} \;\leftrightarrow\; \text{Punkt P}$$

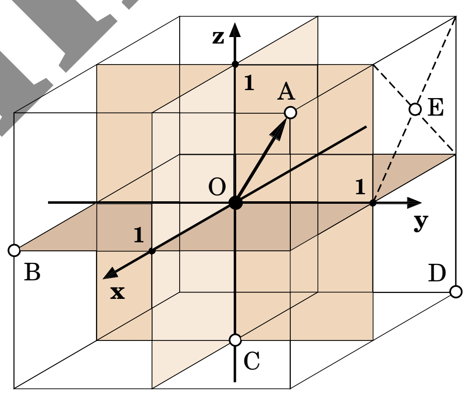
Definition. Die Komponenten x, y, z von $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ heissen die *Koordinaten* von P.

Man schreibt $P = (x/y/z)$ und spricht von der *Koordinatendarstellung* von P. Der Vektor $\overrightarrow{OP}$ heisst *Ortsvektor* des Punktes P.

Bemerkung
Trotz der engen Beziehung zwischen Punkten und ihren Ortsvektoren sollte man nie Punkte 'addieren' oder 'subtrahieren'. Überdies ist der Unterschied in der Schreibweise zwischen den geometrisch verschiedenen Objekten, Vektoren und Punkten, konsequent zu beachten (Koordinaten von Punkten schreiben wir nebeneinander, Komponenten von Vektoren übereinander).

Beispiel *Koordinaten von Punkten*

Nenne die Koordinatendarstellungen der im nebenstehenden Koordinatensystem gezeichneten Punkte (Beachte: Die Ortsvektoren der mit 1 markierten Achsenpunkte sind die Basisvektoren):



A = ... , jedoch $\overrightarrow{OA}$ = ...

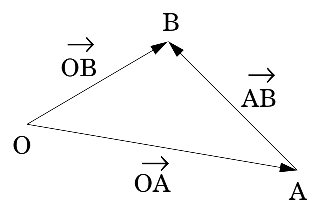
B = ... C = ...

D = ... E = ...

C5. AUFGABEN

Zunächst sollen drei Grundaufgaben besprochen werden, die immer wieder auftreten. Dabei gehen wir bei allen drei Aufgaben von zwei gegebenen Punkten aus:
$\mathbf{A = (a_1/a_2/a_3)}$ und $\mathbf{B = (b_1/b_2/b_3)}$

Grundaufgabe 1: *Verbindungsvektor* $\overrightarrow{AB}$ *der Punkte A und B*



Wegen $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ gilt: $\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}}$

Kurz: Koordinaten des Endpunktes minus entsprechende Koordinaten des Anfangspunktes!

Beispiel *Verbindungsvektor*

Bestimme $\overrightarrow{AB}$ mit $A = (5/-3/1)$ und $B = (7/5/-2)$: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots \end{pmatrix}$

Grundaufgabe 2: *Streckenlänge* $\overline{AB}$

Wegen $\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$ gilt: $\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2 + (b_3-a_3)^2}}$

Beachte: Für die Praxis empfiehlt sich, die Rechnung in 2 Schritten auszuführen, d.h. zuerst den Vektor $\overrightarrow{AB}$ und anschliessend seinen Betrag zu berechnen.

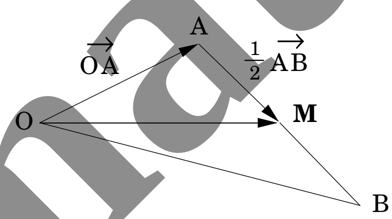
Beispiel *Streckenlänge*

Berechne $\overline{AB}$ mit A=(2/–2/1) und B=(3/2/–7): $\overline{AB} = \left|\begin{pmatrix} \\ \\ \ldots\ldots \end{pmatrix}\right| = \ldots\ldots$

Grundaufgabe 3: *Streckenmitte M von AB*

Wegen $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+\frac{1}{2}(b_1-a_1) \\ a_2+\frac{1}{2}(b_2-a_2) \\ a_3+\frac{1}{2}(b_3-a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a_1+b_1) \\ \frac{1}{2}(a_2+b_2) \\ \frac{1}{2}(a_3+b_3) \end{pmatrix}$ gilt:

$$\boxed{M = \left(\frac{a_1+b_1}{2} \,/\, \frac{a_2+b_2}{2} \,/\, \frac{a_3+b_3}{2}\right)}$$



Kurz: Arithmetisches Mittel der entsprechenden Koordinaten!

Beispiel *Streckenmitte*

Bestimme den Mittelpunkt M von AB mit A=(5/–4/2) und B=(9/2/–2):

M = ...

Aufgaben

Die nachfolgenden Aufgaben sollen auf den nächsten Leerseiten gelöst werden. Sie lassen sich in Teilaufgaben zerlegen, die häufig den eben behandelten drei Grundaufgaben entsprechen. Bei der Berechnung eines Punktes kann es zweckmässig sein, den zugehörigen Ortsvektor zu bestimmen.

Aufgabe 1 A = (1/–2/3), B = (5/2/–5), C = (9/6/–7)

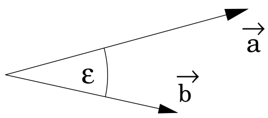
Bestimme die Seitenmittelpunkte und den Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

Aufgabe 2 A = (–1/9/4), B = (11/3/8), C = (t/0/t)

a. Wo im Koordinatensystem liegt der Punkt C für jedes $t \in \mathbb{R}$?
b. Bestimme t so, dass das Dreieck ABC mit der Basis AB gleichschenklig ist.
c. Berechne den Inhalt dieses Dreiecks.

Aufgabe 3

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$



Bestimme einen Vektor in Richtung der Winkelhalbierenden des Winkels ε.

Aufgabe 4 A = (4/4/3), B = (2/0/–1)

In welchen Punkten durchstösst die x-Achse die Kugel mit Durchmesser AB?

Aufgabe 5 A = (4/–1/5), B = (0/1/11), C = (8/9/5), D = (–2/–1/1)

Zeige vektoriell, dass die Seitenmittelpunkte des Vierecks ABCD ein Parallelogramm bilden.

Mathematik