E. VEKTORPRODUKT

E1. Definition

Das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren einen Skalar zu, beim Vektorprodukt soll nun das Resultat ein Vektor sein. Wie das Skalarprodukt ist auch das Vektorprodukt in der Physik sehr wichtig, beispielsweise bei Drehmomenten, elektromagnetischen Feldern usw. Eine Diskussion physikalischer Beispiele würde hier allerdings zu weit führen. Im Rahmen unserer analytischen Geometrie wird das Vektorprodukt unterschiedlich eingesetzt. So ist es vor allem dort wichtig, wo es um das Senkrechtstehen auf zwei vorgegebenen Richtungen geht; es dient aber auch der Berechnung von Flächeninhalten.

Bei der Theorie über das Skalarprodukt sind wir von einer geometrischen Definition ausgegangen und haben dann die algebraische Beschreibung, d.h. die Komponentendarstellung, hergeleitet. Beim Vektorprodukt soll nun der umgekehrte Weg eingeschlagen werden: Wir entwickeln zuerst die Komponentendarstellung und betrachten diese als Definition des Vektorproduktes, um anschliessend seine geometrischen Eigenschaften zu untersuchen.

Problemstellung:

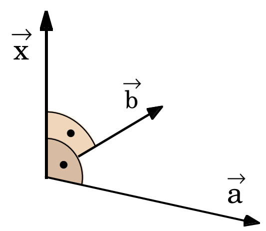
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Das Vektorprodukt soll zwei Vektoren einen neuen Vektor zuordnen (als Operationszeichen wird $\times$, sprich 'kreuz', verwendet).
Wie sind die Komponenten dieses Vektors zu definieren?

Der Produktvektor soll senkrecht stehen auf den Operanden:

Wir fragen zunächst einmal, welche Richtung der Produktvektor $\vec{x}$ bezüglich der Operanden $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben soll. In der Physik kommen im Zusammenhang mit den bereits erwähnten Drehmomenten, elektromagnetischen Feldern etc. Grössen vor, welche auf den Vektorgrössen, die sie verursachen, senkrecht stehen. Deshalb verlangen wir:

$$\begin{array}{rl} & \vec{x} \text{ senkrecht } \vec{a} \\ \text{und} & \vec{x} \text{ senkrecht } \vec{b} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} & \vec{x}\cdot\vec{a} = 0 \\ \text{und} & \vec{x}\cdot\vec{b} = 0 \end{array}$$



Mit den Komponentendarstellungen $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und den drei Unbekannten x_1, x_2 und x_3, bei dem wir mit der Additionsmethode x_3 eliminieren:

$$\begin{array}{l|c|} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 & b_3 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 & (-a_3) \\ \hline \end{array}$$

$$\underbrace{(a_1b_3 - a_3b_1)}_{c}\, x_1 + \underbrace{(a_2b_3 - a_3b_2)}_{d}\, x_2 = 0$$

Es resultiert nun folgende Lösung (x_3 erraten und mit Einsetzen überprüfen):

$$\begin{aligned} x_1 &= d = a_2b_3 - a_3b_2 \\ x_2 &= -c = a_3b_1 - a_1b_3 \\ x_3 &= \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Mathematik

© S/W

Mathemathik

Es ist eine Auswahl zu treffen:

Auch $\vec{x} = k\begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ ist Lösung. Der Betrag von $\vec{x}$ ist ja nicht festgelegt mit der Forderung, dass $\vec{x}$ senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zu stehen hat. Welche der unendlich vielen Lösungen wollen wir nun für das Vektorprodukt verwenden? Die Betrachtung eines Spezialfalls soll uns diesen Entscheid erleichtern.

$\vec{a} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die Lösung mit $k = 1$ ergibt dann $\vec{x} = \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgrund der Ästhetik dieses Resultates nehmen wir die Lösung mit $k = 1$.

Definition. Das *Vektorprodukt* ist wie folgt erklärt: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$.

<u>Beispiel</u> *Vektorprodukt*

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \dots\dots \end{pmatrix}$$

Rechen-Schema:

E2. GEOMETRISCHE EIGENSCHAFTEN

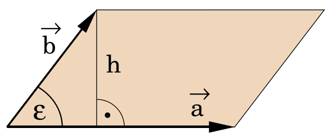
Im Folgenden seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei nicht kollineare Vektoren.

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$. (gemäss obiger Festlegung)

2. $|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist der Inhalt eines von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

<u>Beweis</u>:

Wir betrachten das Quadrat des Inhalts I, um Wurzeln zu vermeiden. Bei stumpfem Zwischenwinkel ε kann zusätzlich die Beziehung $\sin(180° - \varepsilon) = \sin\varepsilon$ verwendet werden.
(Der Teilschritt $*$ ist ziemlich rechenaufwendig.)



$$\begin{aligned} \mathbf{I^2} &= |\vec{a}|^2 h^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\varepsilon \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\varepsilon) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= (a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &\overset{*}{=} (a_2{}^2 b_3{}^2 + a_3{}^2 b_2{}^2 - 2\, a_2 b_2 a_3 b_3) + (a_3{}^2 b_1{}^2 + a_1{}^2 b_3{}^2 - 2\, a_3 b_3 a_1 b_1) \\ &\quad + (a_1{}^2 b_2{}^2 + a_2{}^2 b_1{}^2 - 2\, a_1 b_1 a_2 b_2) = |\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}|^{\mathbf{2}} \end{aligned}$$

3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Voraussetzung ist, wie bei der Einführung des Koordinatensystems vereinbart, dass schon die Basisvektoren in der Reihenfolge $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ ein Rechtssystem bilden.

Mathemathik

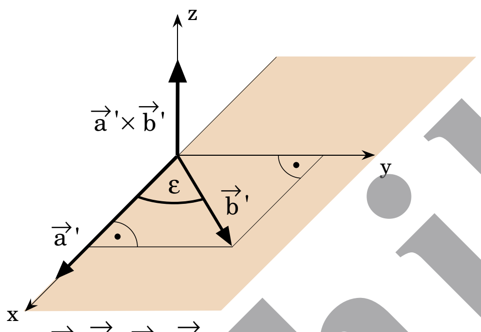
© S/W

Mathemathik

Beweisskizze:
Durch eine eigentliche Bewegung lässt sich das Vektorpaar $(\vec{a}, \vec{b})$ mit dem Zwischenwinkel ε in das Vektorpaar $(\vec{a}', \vec{b}')$ überführen, wobei Letzteres in der getönten xy-Halbebene repräsentiert wird und $\vec{a}'$ die Richtung der positiven x-Halbachse hat (siehe Skizze). Weil dabei der Betrag des Vektorproduktes (=Parallelogramminhalt) konstant bleibt und sich seine Komponenten stetig (nicht sprunghaft) ändern, bleibt die Orientierung erhalten.

Es ist dann $\vec{a}' = \begin{pmatrix} |\vec{a}| \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}' = \begin{pmatrix} |\vec{b}| \cos\varepsilon \\ |\vec{b}| \sin\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$

und somit $\vec{a}' \times \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\underbrace{\sin\varepsilon}_{>0,\ \text{da } 0<\varepsilon<180°} \end{pmatrix}$.



Offensichtlich bilden $\vec{a}'$, $\vec{b}'$, $\vec{a}' \times \vec{b}'$ und somit auch $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Rechtssystem.

Rechengesetze
$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})}$. Man sagt, das Vektorprodukt sei *antikommutativ*.
$\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{o} = \vec{o}}$, $\boldsymbol{\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}}$
Im Allgemeinen gilt das Assoziativgesetz $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ nicht, was durch Angabe eines Gegenbeispiels leicht zu verifizieren ist.

Beim Rechnen mit Vektorprodukten ist Vorsicht geboten!
Mehrere wichtige, vom Zahlenrechnen bekannte Gesetze gelten nicht mehr, sobald Vektorprodukte beteiligt sind. Weil wir aber kaum Umformungen von Termen mit Vektorprodukten vornehmen werden, entstehen deswegen keine Probleme.

E3. Flächenformel und Aufgaben

Da der Betrag des Vektorproduktes als Inhalt eines Parallelogramms gedeutet werden kann, lassen sich Dreiecks- und darauf basierend Vielecksinhalte berechnen. Für Dreiecke nennen wir eine unmittelbar resultierende *Flächenformel*.

Inhalt I eines Dreiecks ABC: $I = \dfrac{|\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots|}{\ldots\ldots}$

Aufgaben
Das Vektorprodukt wird von jetzt an immer wieder zur Anwendung gelangen. An dieser Stelle sind auf den nächsten Leerseiten die folgenden Aufgaben zu lösen:

Aufgabe 1 A = (1/1/1), B = (4/3/3), C = (0/–1/3)
a. Berechne den Inhalt des Dreiecks ABC.
b. Es gibt zwei Tetraeder ABCD mit Volumen 18, für die je der Fusspunkt der von D ausgehenden Höhe die Mitte von BC ist. Bestimme die zugehörigen Ecken D.

Aufgabe 2 A = (3/3/2), B = (1/1/1), C = (–1/2/3)
AB und BC seien zwei Kanten eines Würfels.
a. Wie viele Würfel mit diesen Kanten gibt es, und wie viel beträgt ihr Volumen?
b. Bestimme alle übrigen Ecken des Würfels, für den $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BF}$ (BF ist die dritte von B ausgehende Würfelkante) in dieser Reihenfolge ein Linkssystem bilden.

Aufgabe 3 Zeige: $|k\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times k\vec{b}| = |k|\,|\vec{a} \times \vec{b}|$

Mathematik

Mathemathik