

Kapitel E

47. $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Für welche x hat das von \vec{a} und \vec{b} aufgespannte Parallelogramm den Inhalt 3?

48. $A=(8/5/7), B=(5/5/4), M=(4/3/2)$

Berechne für das Parallelogramm ABCD mit Mittelpunkt M

a. den Inhalt I, b. die Höhe h_a .

49. $A=(3/5/5), B=(1/1/1), C=(5/3/-3)$

ABCD ist die Grundfläche einer geraden quadratischen Pyramide mit der Höhe $h=9$. Bestimme die beiden möglichen Spitzen S.

50. $A=(10/0/0), B=(0/6/0), C=(0/0/4)$

Die je auf einer Koordinatenachse liegenden Punkte A, B, C und der Ursprung O seien die Ecken eines Tetraeders. Berechne für dieses Tetraeder

a. die Oberfläche S,
b. die Länge h der Höhe, welche nicht mit einer Kante zusammenfällt.

51. $A=(0/10/4), B=(2/14/8)$

Für welche Punkte C auf der x -Achse hat das Dreieck ABC den Inhalt 18?

52. $A=(6/8/3), B=(3/2/1), C=(9/0/-2)$

Die Punkte A, B und C sind die Ecken der Grundfläche eines geraden dreiseitigen Prismas mit Volumen 343. Die entsprechenden Ecken der Deckfläche seien D, E bzw. F. Bestimme diese Ecken.

53. $P=(0/0/1), Q=(-3/4/3), R=(5/-3/5)$

Die drei Punkte P, Q und R sind die Mittelpunkte von Kugeln je mit Radius 3. Man denke sich eine Ebene, die alle drei Kugeln so berührt, dass ihre Mittelpunkte auf derselben Seite der Ebene liegen.

a. Bestimme die beiden möglichen Berührungspunkte der Kugel mit Mittelpunkt P.
b. Wie viel beträgt der Inhalt I des Dreiecks, das durch die drei Berührungspunkte bestimmt ist?

Zusatz: Wie viele Ebenen, welche die drei Kugeln berühren, gibt es insgesamt?

54. Es seien $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$.

a. Für welche Vektoren gilt $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}|$?

b. Für welche Vektoren gilt $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$?

c. Gilt das Assoziativgesetz $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$? Begründe!

55. Wie lässt sich mit Hilfe von Vektor- und Skalarprodukt entscheiden, ob vier verschiedene Punkte in einer Ebene liegen? Wie verhält es sich diesbezüglich mit

a. $A=(2/1/4), B=(3/2/1), C=(4/3/0), D=(1/0/0)$,

b. $A=(-1/1/5), B=(0/2/6), C=(0/1/3), D=(4/3/2)$?

56. Aufgrund der Skizze ist anschaulich klar, dass die drei Vektoren \vec{b}, \vec{c} und $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ komplanar sind. Der genaue algebraische Zusammenhang lautet so:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

Zeige: Diese Beziehung gilt für beliebige \vec{a}, \vec{b} und \vec{c} .

