WEITERFÜHRENDE ÜBUNGEN

Mit den folgenden Übungen sollen abschliessend noch ein paar weitere Themen angeschnitten werden.

1. ***'Koordinatengleichung' einer Geraden***

Nebst Parametergleichungen für Geraden im Raum liessen sich auch Koordinatengleichungen angeben, die allerdings unpraktisch sind. Dem folgenden Beispiel entnimmt man, wie eine solche Koordinatengleichung aussehen könnte:

$$(2x+y-5z+11)^2 + (x-3y+z+2)^2 = 0$$

a. Weshalb wird durch diese 'Koordinatengleichung' eine Gerade dargestellt?
Hinweis: Man denke sich die Gleichung durch ein geeignetes Gleichungssystem ersetzt.
b. Nenne eine Parametergleichung dieser Geraden.

2. ***Parametergleichung einer Ebene***

Wir haben Koordinatengleichungen von Ebenen besprochen, auf die Diskussion von Parametergleichungen jedoch verzichtet. Dass auch Parametergleichungen möglich sind, zeigt das folgende Beispiel:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a. Weshalb wird durch diese Parametergleichung eine Ebene beschrieben?
Hinweis: Vergleiche mit der Parametergleichung einer Geraden.
b. Nenne eine Koordinatengleichung dieser Ebene.
c. Wie lautet die allgemeine Form der Parametergleichung einer Ebene?

3. ***Kugelgleichung***

Aufgaben, in denen Kugeln vorgekommen sind, konnten wir lösen, ohne dabei explizite eine Kugelgleichung zu verwenden. Nachfolgend sind nun zwei äquivalente Koordinatengleichungen einer Kugel angegeben:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+5=0$$

a. Nenne Mittelpunkt M und Radius r der so beschriebenen Kugel.
b. In welchen Punkten durchstösst die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ diese Kugel?
Hinweis: Arbeite mit der Kugelgleichung, obschon auch hier ihre explizite Verwendung für die Lösung des Problems nicht unbedingt erforderlich ist.
c. Wie lautet die allgemeine Form der Koordinatengleichung einer Kugel?

4. ***Drehkegelfläche und Kegelschnitte***

Es seien g und h zwei verschiedene Geraden, die in einer Ebene liegen. Lässt man g um h rotieren, so wird durch g ein beidseitig unbegrenzter Doppelkegel bzw. in Spezialfällen ein beidseitig unbegrenzter Zylinder oder eine Ebene erzeugt. Als Oberbegriff für alles zusammen verwenden wir *Drehkegelfläche* und nennen h die *Achse* und g die *Mantellinie*. Schneiden sich g und h im Punkt S unter dem Winkel α mit $\alpha < 90°$, so heisst S die *Spitze* und α der *halbe Öffnungswinkel*. Die beim Schneiden einer Drehkegelfläche mit einer Ebene entstehende Punktmenge wird als *Kegelschnitt* bezeichnet.

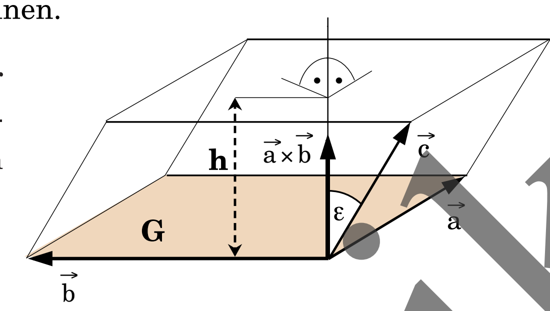
Gegeben sei eine Drehkegelfläche mit der Spitze S = (3/4/2), dem weiteren Achsenpunkt A = (1/3/0) und dem halben Öffnungswinkel $\alpha = 30°$.

a. Wie lautet eine Gleichung dieser Drehkegelfläche?
b. Wie lautet eine Gleichung des Kegelschnitts, der entsteht, wenn die Drehkegelfläche mit der xy-Ebene geschnitten wird?
c. Nenne die allgemeine Form einer Kegelschnittgleichung in der xy-Ebene.
d. Wie muss die Schnittebene bezüglich der Drehkegelfläche liegen, damit der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist?

5. ***Spatprodukt***

Wir betrachten drei nicht komplanare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die von einem gemeinsamen Punkt aus repräsentiert sind und so einen Spat aufspannen. Es geht zunächst darum, auf möglichst einfache Weise das Volumen V dieses Spats (Grundfläche G, Höhe h) aus den drei Vektoren zu berechnen.

In der Skizze bilden $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Der Winkel ε zwischen $\vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{c}$ ist dann spitz oder 0°, und es gilt:



$$\mathbf{V} = G\,h = |\vec{a} \times \vec{b}|\;|\vec{c}|\cos\varepsilon = (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \cdot \vec{\mathbf{c}}$$

Vertauscht man in $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so folgt aufgrund von Rechengesetzen: $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = (-(\vec{a} \times \vec{b})) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -V$.

Die beiden Vektorterme $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ und $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$ unterscheiden sich somit nur im Vorzeichen und ihr Betrag ist das Volumen des Spats. Durch das Vorzeichen selbst wird eine ***Orientierung*** festgelegt: Die drei (nicht komplanaren) Vektoren bilden in der Operandenreihenfolge ein ***Rechtssystem***, falls der Vektorterm positiv, und ein ***Linkssystem***, falls er negativ ist (vorausgesetzt, schon die Basisvektoren bilden in der Reihenfolge $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ ein Rechtssystem).

Definition. Es seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beliebige Vektoren. Der Vektorterm $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ wird als *Spatprodukt* bezeichnet und in der Form $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ geschrieben.

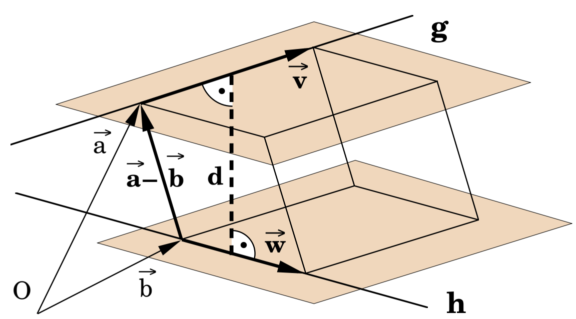
a. Welche Beziehungen resultieren, wenn man die drei Operanden des Spatproduktes vertauscht?
b. Nochmals: Wie lässt sich das Spatprodukt geometrisch deuten?
c. Wann genau ist das Spatprodukt 0?
d. Berechne das Volumen des Tetraeders mit den Ecken A = (3/4/4), B = (5/0/5), C = (2/2/–1) und D = (6/2/1).

6. ***Abstand zweier windschiefer Geraden***

Gegeben sind zwei windschiefe Geraden: g: $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{v}$, h: $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{w}$

Der Abstand d (= Länge der kürzesten Verbindungsstrecke der Geraden g und h) ist der Abstand der beiden Parallelebenen, die sich durch g und h legen lassen: Die untere Ebene ergibt sich, wenn man die Gerade h parallel verschiebt bis sie g schneidet, und umgekehrt die obere, wenn man die Gerade g parallel verschiebt bis sie h schneidet. Das Abstandsproblem kann also auch so formuliert werden:

Der Abstand d ist die Höhe des Spates, der gemäss Skizze von Repräsentanten der Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{a} - \vec{b}$ aufgespannt wird. Es gilt demzufolge:



$$\boxed{d = \frac{|(\vec{v}, \vec{w}, \vec{a} - \vec{b})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}}$$

g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, h: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechne den Abstand d von g und h.