# D. POLYNOMFUNKTIONEN

## D1. Begriff und einige Eigenschaften

Wir beginnen gleich mit der allgemeinen Definition:

**Definition.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_{n-1}$, $a_n$ feste reelle Zahlen, wobei $a_n \neq 0$. Eine Funktion mit einer Gleichung der Form

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

heisst eine *Polynomfunktion n-ten Grades* oder auch *ganz-rationale Funktion n-ten Grades*. Die Zahlen $a_0$, $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_{n-1}$, $a_n$ heissen die *Koeffizienten* der Polynomfunktion. Der Koeffizient $a_n$ heisst *Höchstkoeffizient* ($x^n$ ist die höchste vorkommende Potenz), und den Koeffizienten $a_0$ bezeichnet man als *konstantes Glied*. Die Funktion, die nur aus dem konstanten Glied besteht, also $y = a_0$, wird häufig als Polynomfunktion 0-ten Grades betrachtet.

Beispiele *Begriff der Polynomfunktion*

a. $y = 2x^3 - 5x^2 + x + 13$

Polynomfunktion 3. Grades mit dem Höchstkoeffizienten $a_3 =$ ...., den weiteren Koeffizienten $a_2 =$ ......., $a_1 =$ .... und dem konstanten Glied $a_0 =$ ...... .

b. $y = x^6 + 4x^3 - 0.5x^2 + \pi$

Polynomfunktion .... Grades mit dem Höchstkoeffizienten .........., den weiteren Koeffizienten $a_5 =$ ...., $a_4 =$ ...., $a_3 =$ ...., $a_2 =$ .........., $a_1 =$ .... und dem konstanten Glied $a_0 =$ .... .

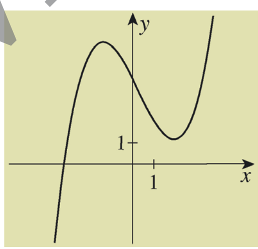
Polynomfunktionen 1. und 2. Grades sind uns bereits bekannt (in diesen einfachen Fällen werden die Koeffizienten gewöhnlich ohne Indizes geschrieben):

| | |
|---|---|
| $y = ax + b$ | Eine Polynomfunktion 1. Grades ist eine lineare Funktion. |
| $y = ax^2 + bx + c$ | Eine Polynomfunktion 2. Grades ist eine quadratische Funktion. |

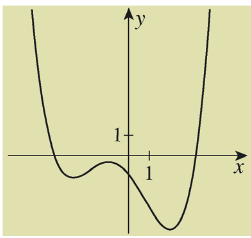
In der Mathematik und deren Anwendungen spielen Polynomfunktionen eine ganz wichtige Rolle. Einerseits sind sie relativ einfach (sie basieren auf den Operationen Addition und Multiplikation), andererseits aber doch genügend allgemein, um mit ihnen grosse Klassen von komplizierteren Funktionen mit beliebiger Genauigkeit approximieren (annähern, nachahmen) zu können. Dieser Sachverhalt wird ganz am Schluss unserer Theorie (Seiten 44-46) noch etwas genauer erläutert. Bevor wir uns mit der Ableitung von Polynomfunktionen befassen, wollen wir anhand der untenstehenden drei Beispiele eine Idee vermitteln, wie ihre Graphen in etwa aussehen können. Zudem sollen das Verhalten für betragsmässig grosse $x$ und zwei Symmetrieaspekte diskutiert werden.

Beispiele *Graphen von Polynomfunktionen*

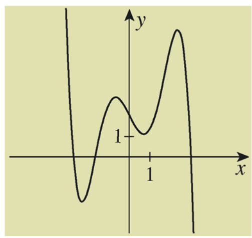
a. $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - 2x + 4$




b. $y = \frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - 1$




c. $y = -\frac{1}{6}x^5 + \frac{8}{5}x^3 - 2x + 2$



D

Der Definitionsbereich einer Polynomfunktion ist stets $\mathbb{R}$. Es gibt also keine Definitionslücken und somit auch keine Pole (und für jeden Grad $n > 1$ sind keinerlei Asymptoten vorhanden). Kurzum: Der Graph einer Polynomfunktion benimmt sich 'ganz brav'. Was das Verhalten für betragsmässig grosse $x$ betrifft, so ist in gewisser Weise eine Abschätzung möglich:

Wir erläutern dies anhand des Beispiels a (Rückseite unten). Im Funktionsterm wird das Glied mit der höchsten Potenz ausgeklammert:

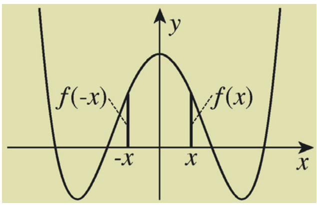
$$y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - 2x + 4 = \frac{1}{4}x^3 \left(1 - \frac{4}{5x} - \frac{8}{x^2} + \frac{16}{x^3}\right)$$

Strebt nun $x$ gegen $\pm\infty$, so strebt der Klammerterm gegen 1. Demnach hat für $x$ gegen $\pm\infty$ die Funktion $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - 2x + 4$ dieselben uneigentlichen Grenzwerte wie $y = \frac{1}{4}x^3$. *Für betragsmässig grosse $x$ dominiert das Glied mit der höchsten Potenz!*

Die Graphen von Polynomfunktionen können Symmetrien aufweisen, wobei zwei davon leicht zu erkennen sind. Beispiele sollen den diesbezüglichen allgemeinen Satz vorbereiten:

Beispiele *Symmetrieaspekte bei Polynomfunktionen*

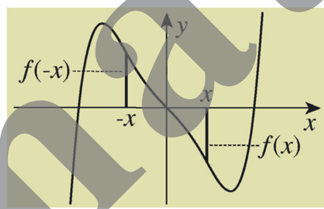
a. $f : y = \frac{1}{25}x^4 - x^2 + 4$




$$\begin{aligned} f(-x) &= \tfrac{1}{25}(-x)^4 - (-x)^2 + 4 \\ &= \tfrac{1}{25}x^4 - x^2 + 4 = f(x) \end{aligned}$$

Da alle Exponenten von $f(x)$ gerade sind, ist Graph $f$ symmetrisch bezüglich der $y$-Achse. (Beachte: $4 = 4x^0$ für $x \neq 0$, wobei 0 gerade.)

b. $f : y = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{6}x^3 - x$




$$\begin{aligned} f(-x) &= \tfrac{1}{60}(-x)^5 - \tfrac{1}{6}(-x)^3 - (-x) \\ &= -\tfrac{1}{60}x^5 + \tfrac{1}{6}x^3 + x = -f(x) \end{aligned}$$

Da alle Exponenten von $f(x)$ ungerade sind, ist Graph $f$ symmetrisch bezüglich des Ursprungs. (Beachte: $x = x^1$.)

Gleich wie in diesen Beispielen beweist man ganz allgemein: Ist $y = f(x)$ eine Polynomfunktion und sind alle Exponenten von $f(x)$ gerade/ungerade, so ist Graph $f$ symmetrisch bezüglich $y$-Achse/Ursprung. Man kann zeigen, dass auch die Umkehrung gilt. Wir fassen im folgenden Satz zusammen:

**Satz (Symmetrie von Polynomfunktionen).** Für eine Polynomfunktion $y = f(x)$ gilt:

Alle Exponenten von $f(x)$ sind gerade. $\Leftrightarrow$ Graph $f$ ist symmetrisch bzgl. $y$-Achse.
Alle Exponenten von $f(x)$ sind ungerade. $\Leftrightarrow$ Graph $f$ ist symmetrisch bzgl. Ursprung.

Und nun zur Ableitung von Polynomfunktionen:

Beispiel *Ableitung einer Polynomfunktion*

$y = x^6 - 7x^5 - 3x + 1$. Wir verwenden die Definition der Ableitung:

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h)^6 - 7(x+h)^5 - 3(x+h) + 1\right] - \left[x^6 - 7x^5 - 3x + 1\right]}{h} = \cdots$$

Im Prinzip muss man ausmultiplizieren, wobei die binomische Formel zu verwenden ist. Der entstehende Term ist dann zu vereinfachen. Da sich der Arbeitsaufwand mit Hilfe von sogenannten Ableitungsregeln drastisch reduzieren lässt, sei auf die Rechnung verzichtet.

## D2. Erste Ableitungsregeln

Als erstes betrachten wir Potenzfunktionen $y = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$:

$y = x^1 = x \;\rightarrow\; y' = 1$ (Tangentensteigung = Steigung der Geraden)

$y = x^2 \;\rightarrow\; y' = 2x$ (Beispiel b, Seite 18)

$y = x^3 \;\rightarrow\; y' = 3x^2$ (Beispiel d, Seite 11, sowie Aufgabe 13a, Seite 63)

Aufgrund dieser Spezialfälle ist allgemein folgende Regel zu vermuten:

**Potenzregel**

$\boxed{y = x^n \;\rightarrow\; y' = \ldots\ldots\ldots\ldots}$ *Den Exponenten als Faktor nach vorne bringen und neu einen um 1 kleineren Exponenten schreiben.*

Beweis. Ausgehend von der Ableitungsdefinition benützen wir die binomische Formel, die im Beispiel (Seite 27 unten) vermieden wurde. Dies geschieht aber nur dieses eine Mal:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \cdots + \binom{n}{n-1}xh^{n-2} + h^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}. \qquad \square$$

Die folgenden drei Ableitungsregeln sind für *beliebige differenzierbare Funktionen* $y = f(x)$ und $y = g(x)$, also nicht nur für Polynomfunktionen gültig:

**Summenregel**

$\boxed{y = f(x) + g(x) \;\rightarrow\; y' = f'(x) + g'(x)}$ *Man darf summandenweise ableiten.*

Beweis. Der Differenzialquotient der Summenfunktion lässt sich mit Hilfe eines Grenzwertsatzes (Summensatz) als Summe von Differenzialquotienten schreiben:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x). \qquad \square$$

**Regel über den konstanten Faktor**

$\boxed{y = cf(x) \;\rightarrow\; y' = cf'(x)}$ *Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.*

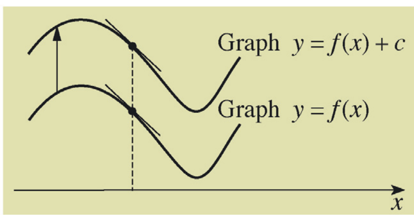
Beweis. Auch hier gelangt ein Grenzwertsatz (Konstantensatz) zur Anwendung:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = \lim_{h\to 0} c\, \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = cf'(x). \qquad \square$$

**Regel über den konstanten Summanden**

$\boxed{y = f(x) + c \;\rightarrow\; y' = f'(x)}$ *Ein konstanter Summand fällt beim Ableiten weg.*

Beweis. Wir verzichten hier auf einen algebraischen Beweis, denn der Sachverhalt ist schon aufgrund der nebenstehenden Skizze klar.




$\square$

Mit diesen Ableitungsregeln können nun Polynomfunktionen abgeleitet werden. Keinesfalls sollte man dabei den TR verwenden, denn der Aufwand für das Eintippen der Funktion und das Abschreiben der Ableitungsfunktion ist im Vergleich zur sehr einfachen Handrechnung unverhältnismässig gross.

Beispiele *Anwendung der Ableitungsregeln*

a. Zuerst betrachten wir das abgebrochene Beispiel (Seite 27 unten):

$$y = x^6 - 7x^5 - 3x + 1 \quad \rightarrow \quad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

b. Bestimme die Ableitungen folgender Polynomfunktionen:

$$y = x^{10} + 9x^4 - 5x^2 - 6 \quad \rightarrow \quad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = (x+1)(x-4) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \rightarrow \quad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

c. Leite nach $x$ ab:

$$y = ax^4 - bx + cx - d \quad \rightarrow \quad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = 3p^3x^3 + q^2x^2 - r^5x \quad \rightarrow \quad y' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

## D3. Gleichungen $n$-ten Grades

Beim Umgang mit Polynomfunktionen $n$-ten Grades werden wir immer wieder auf Gleichungen $n$-ten Grades stossen. Die folgenden Spezialfälle kennen wir bereits (es ist je $a \neq 0$):

$ax + b = 0$ Gleichung 1. Grades ist eine lineare Gleichung. Sie hat eine Lösung: $x = -\frac{b}{a}$.

$ax^2 + bx + c = 0$ Gleichung 2. Grades ist eine quadratische Gleichung. Auflösungsformel:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Im Reellen hat die Gleichung zwei, eine oder keine Lösung.

**Definition.** Eine *Gleichung $n$-ten Grades* entsteht, wenn man in der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion $n$-ten Grades $y = 0$ setzt:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0).$$

Besitzt eine Gleichungen $n$-ten Grades immer Lösungen und gibt es eine Auflösungsformel? C. F. Gauss, einer der grössten Mathematiker aller Zeiten, befasste sich eingehend mit Gleichungen $n$-ten Grades. Er erkannte, dass eine befriedigende Theorie nur möglich ist, wenn man den Bereich der reellen Zahlen erweitert. Seine Untersuchungen gipfelten in einem Satz, den man als *Fundamentalsatz der Algebra* (1799) bezeichnet. Der Fundamentalsatz besagt, dass jede Gleichung $n$-ten Grades im Bereich der sogenannten komplexen Zahlen mindestens eine Lösung besitzt. Zwar ist dadurch die Existenz von Lösungen sichergestellt, wie man sie findet, darüber macht der Satz keine Aussage. Etwas später, in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts, konnte gezeigt werden, dass sich die Lösungen einer allgemeinen Gleichung mit einem Grad grösser 4 nicht mit Wurzeln ausdrücken lassen, dass es also keine Auflösungsformel wie bei der quadratischen Gleichung gibt. Dieses eher negative Resultat geht zurück auf den norwegischen Mathematiker Niels H. Abel und den französischen Mathematiker Elvariste Galois, die beide sehr jung starben (Abel mit 26 Jahren an Tuberkulose und Galois mit 21 Jahren bei einem Duell).

Für die Praxis ist heutezutage das Fehlen von Auflösungsformeln unwichtig, denn schon ein Schultaschenrechner kann problemlos gute Nährungswerte von Lösungen finden. Dabei sind Existenzsätze wie etwa der Fundamentalsatz von zentraler Bedeutung, denn diese stellen sicher, dass die Näherungsmethoden ans Ziel führen. Exakte Lösungen spielen vor allem bei theoretischen Untersuchungen eine wichtige Rolle. So kann beispielsweise beim Vorliegen einer exakten Lösung der Grad einer Gleichung durch sogenanntes Abspalten eines Linearfaktors um 1 reduziert werden. Wir erläutern am Beispiel:

D

Beispiel *Abspalten eines Linearfaktors*

Wir betrachten folgende Gleichung 3. Grades:

$$x^3 + x^2 + x - 3 = 0\,.$$

Offensichtlich ist $x = 1$ eine Lösung dieser Gleichung. Wir dividieren nun den Gleichungsterm mit Hilfe des bekannten Divisionsalgorithmus durch $x-1$ ($x$ minus Lösung). Diese Division kann auch mit Hilfe des TR durchgeführt werden:

$$\begin{array}{rl}
(x^3 + x^2 + x - 3) : (x-1) = x^2 + 2x + 3 \\
-\underline{(x^3 - x^2)} \qquad\qquad\qquad\qquad \\
2x^2 + x - 3 \qquad\qquad\quad \\
-\underline{(2x^2 - 2x)} \qquad\qquad\qquad \\
3x - 3 \qquad\qquad\quad \\
-\underline{(3x - 3)} \qquad\qquad\quad \\
0 \qquad\qquad\qquad
\end{array}$$

Die Divivision geht auf. Somit lässt sich die ursprüngliche Gleichung wie folgt schreiben: $(x^2+2x+3)(x-1) = 0$. Für das Auffinden weiterer Lösungen (falls vorhanden) kann man den Linearfaktor $x-1$ weglassen, sich also auf die quadratische Gleichung $x^2+2x+3 = 0$ beschränken; man spricht dabei vom *Abspalten des Linearfaktors* $x-1$. Da die Diskriminante der quadratischen Gleichung kleiner als 0 ist, gibt es in diesem Beispiel keine weiteren Lösungen.

Die ganze Vorgehensweise beruht auf einem allgemeinen Satz über die Linearfaktorzerlegung, den wir ohne Beweis angeben:

**Satz (über die Linearfaktorzerlegung).** Ist $x_0$ Lösung einer Gleichung $n$-ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,,$$

so ist der links stehende Term durch den Linearfaktor $x-x_0$ teilbar, d. h. man kann $x-x_0$ abspalten.

Aus diesem Satz ergibt sich leicht eine Aussage über die Anzahl der Lösungen: *Jede Gleichung $n$-ten Grades hat höchstens $n$ Lösungen.* Begründung: Sukzessives Abspalten führt auf höchstens $n$ Linearfaktoren. So hat beispielsweise eine Gleichung 3. Grades höchstens 3 Lösungen, denn der Gleichungsterm lässt sich in höchstens 3 Linearfaktoren zerlegen (im obigen Beispiel war nur eine Zerlegung mit dem einen Linearfaktor $x-1$ möglich).

Wie aber bekommt man exakte Lösungen, um dann zugehörige Linearfaktoren abspalten zu können? Das blosse Raten funktioniert natürlich nur in ganz speziellen Situationen. In der Praxis ist man manchmal in der komfortablen Lage, Lösungen direkt der Problemstellung entnehmen zu können. Es geht dann nur noch darum, die übrigen Lösungen zu bestimmen.

## D4. Vier Probleme

Im Rahmen der Polynomfunktionen wollen wir jetzt vier Probleme diskutieren, die auch später bei weiteren Funktionstypen auftreten werden. Viele Aspekte dieser Probleme sind in der bisherigen Theorie bereits vorgekommen. *Zu jedem Problem finden sich im Folgenden Aufgaben (mit Fettstrich markiert). Diese Aufgaben sollten im Unterricht bearbeitet werden (entsprechende Leerseiten sind vorhanden). Die Resultate finden sich auf der letzten Seite des Anhangs.*

D

### I. Bestimmung eines Funktionsgraphen

*Gegeben*: Funktionsgleichung
*Gesucht*: Funktionsgraph und damit ein möglichst umfassender Überblick über das Verhalten der Funktion

Häufig spricht man bei diesem Problem von *Kurvendiskussion*. Auch wenn der Funktionsgraph dem TR entnommen werden kann, sollte dieser hier beiseite gelegt werden, und dies aus zwei Gründen: Zum einen sind die bei der Kurvendiskussion von Polynomfunktionen durchzuführenden Handrechnungen einfach, zum andern gewinnt man viele Einblicke, die später helfen, die vom TR gelieferten Resultate besser zu verstehen. Bei Kurvendiskussionen können je nach Situation folgende Punkte wesentlich sein (die Punkte 1 und 4 sind bei Polynomfunktionen noch uninteressant):

1. Definitionsbereich
2. Symmetrie (insbesondere bzgl. $y$-Achse oder Ursprung)
3. Grenzwerte für $x$ gegen $+\infty$ und $-\infty$ $\to$ evtl. horizontale oder schiefe Asymptote
4. Grenzwerte für $x$ gegen eine Zahl $x_0$ $\to$ evtl. vertikale Asymptote
5. Nullstellen der Funktion $\to$ Schnittpunkte mit der x-Achse
6. Nullstellen der 1. Ableitung $\to$ Extrem- oder Sattelpunkte
7. Nullstellen der 2. Ableitung $\to$ Wende- oder Flachpunkte
8. Weitere spezielle Graphenpunkte

Auch wenn an dieser Stelle Kurvendiskussionen isoliert besprochen werden, so dienen sie gewöhnlich nur als anschauliches Hilfsmittel, um ein komplexeres Problem besser zu verstehen. Kurvendiskussionen sollten deshalb unter möglichst geschickter Anpassung an das zu behandelnde Problem durchgeführt werden. Wichtig ist auch, die Teilresultate einer Kurvendiskussion zu vergleichen (Kontrolle) und zu kombinieren (Arbeitseinsparung).

**Aufgabe 1.** $f : y = x^3 - 3x + a$
Graph $f$ schneide die $x$-Achse bei 1. Diskutiere die Funktion $f$.

**Aufgabe 2.** $f : y = x^4 - 6x^2 + 5$
Diskutiere die Funktion $f$.

### II. Bestimmung einer Funktionsgleichung

*Gegeben*: Eigenschaften eines Funktionsgraphen und Art der Funktion
*Gesucht*: Funktionsgleichung

Es handelt sich hier in einem gewissen Sinne um die umgekehrte Problemstellung wie bei der Kurvendiskussion. In der Praxis können Eigenschaften der gesuchten Funktion in Form von Messdaten vorliegen. Es ist dann eine passende Funktion zu finden (Modellbildung).

**Aufgabe 3.** Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades geht durch den Punkt $P(1|{-4})$, hat den Wendepunkt $W(3|-6)$ und an der Stelle $x = 4$ eine horizontale Tangente. Bestimme die Funktionsgleichung.

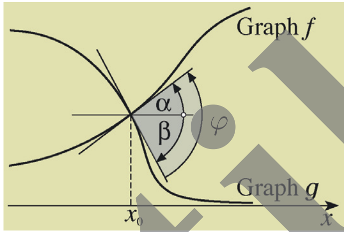
**Aufgabe 4.** Der Graph einer Polynomfunktion 5. Grades ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs und hat den Wendepunkt $W(1|{-1})$. Ausserdem hat er im Ursprung eine Tangente mit der Gleichung $g : y = 6x$. Bestimme die Funktionsgleichung.

## III. Schnittwinkel zweier Funktionsgraphen

*Gegeben*: Zwei Funktionsgraphen
*Gesucht*: Winkel, der von den beiden Graphentangenten in einem Schnittpunkt eingeschlossen wird; man spricht vom *Schnittwinkel* in diesem Punkt.

Die beiden zur Diskussion stehenden Funktionen seien mit $f$ und $g$ bezeichnet. Zunächst hat man zur Berechnung der Schnittstellen die Gleichung $f(x) = g(x)$ zu lösen. Ist nun $x = x_0$ eine Schnittstelle, so kann ein orientierter Winkel $\varphi$ zwischen den beiden Schnittpunktstangenten bei $x_0$ aus deren Steigungswinkeln berechnet werden:

$$\boxed{\varphi = \underbrace{\arctan(f'(x_0))}_{\alpha} - \underbrace{\arctan(g'(x_0))}_{\beta}}$$




Gewöhnlich gibt man den positiven spitzen Winkel zwischen den beiden Schnittpunktstangenten an, was mit Betragsbildung und allfälliger Ergänzung auf 180° erreicht wird.

*Bekannte Spezialfälle:* $f'(x_0) = g'(x_0) \;\rightarrow$ Die Graphen berühren sich (Berührpunkte gelten als spezielle Schnittpunkte).
$f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1 \;\rightarrow$ Die Graphen schneiden sich senkrecht.

**Aufgabe 5.** $f : y = \frac{1}{4}x^2, \quad g : y = x^2 - 3$
Bestimme den Schnittwinkel von Graph $f$ und Graph $g$.

**Aufgabe 6.** $f : y = x - x^3$
Eine Gerade $g$ schneidet Graph $f$ im Ursprung senkrecht. Berechne die andern Schnittwinkel.

## IV. Extremwertprobleme

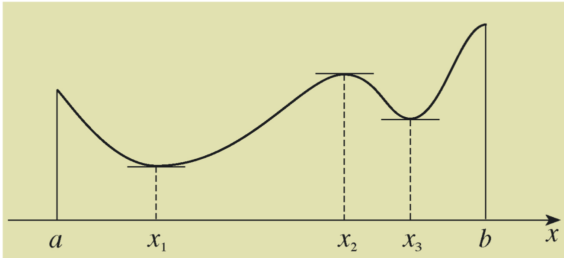
*Gegeben*: Funktionsgleichung
*Gesucht*: Extremwert (absolut grösster oder kleinster Wert) der Funktion.

*Die nachfolgende Beschreibung der Vorgehensweise ist erst verständlich nach einer ausführlichen Besprechung der zugehörigen Aufgaben 7-10 (siehe Seite 33).*

Gewöhnlich muss die Gleichung der Funktion, von welcher ein Extremwert zu bestimmen ist, zuerst noch gefunden werden. Das Aufstellen dieser Funktion ist häufig der schwierigste Teil eines Extremwertproblems, da der Funktionswert zunächst von mehr als nur einer Variablen (Stelle) abhängen kann; wir sprechen in diesem Fall von der *Hauptbedingung* (kurz HB). Diese Variablen sind jedoch bei den Problemen, die hier behandelt werden, durch sogenannte *Nebenbedingungen* (NB) aneinander gekoppelt. Es geht darum, die Nebenbedingungen zu finden; dies geschieht etwa durch Anwenden geometrischer Sätze (Satz von Pythagoras, Strahlensätze etc.). Mit Hilfe der Nebenbedingungen (bei zwei Variablen ist es eine, bei drei Variablen sind es zwei usw.) lässt sich dann die Hauptbedingung durch eine einzige (gewählte) Variable ausdrücken; die so resultierende Funktion heisst *Zielfunktion* (ZF).

Es bleibt noch, den Extremwert der Zielfunktion zu berechnen. Dabei kann es es zweckmässig sein, vorgängig die Zielfunktion zu vereinfachen, denn eine *Extremstelle* (Stelle mit resultierendem Extremwert) bleibt invariant beim Weglassen eines konstanten Summanden, eines konstanten Faktors oder beim Quadrieren des jeweils noch verbleibenden Funktionsterms (solche Vereinfachungen sind allerdings wohl überlegt vorzunehmen). Von der Zielfunktion oder allenfalls vereinfachten Zielfunktion ist nun die *absolute Extremstelle* zu bestimmen. Als Kandidaten kommen in Frage: Die Nullstellen der ersten Ableitung sowie evtl. die Randstellen des relevanten Intervalls (siehe Skizze auf der nächsten Seite). Notfalls muss man die Funktionswerte bei diesen Stellen vergleichen. Um den Extremwert zu erhalten, ist die Extremstelle in der Zielfunktion (und nicht etwa in der vereinfachten Zielfunktion) einzusetzen.

Nebenstehend ist der Graph einer denkbaren Zielfunktion (oder vereinfachten Zielfunktion) im Interval $[a, b]$ gezeichnet. Von den Stellen $a$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $b$, die hier als Kandidaten für ein Extremum in Frage kommen, liefert die Nullstelle $x_1$ der ersten Ableitung das absolute Minimum und die Randstelle $b$ das absolute Maximum ($a$, $x_2$ und $x_3$ heissen *relative Extremalstellen*).




**Aufgabe 7.** Von einem quadratischen Stück Karton mit der Seitenlänge 6 cm werden an den Ecken Quadrate mit der Seitenlänge $x$ abgeschnitten. Wie ist $x$ zu wählen, damit der Rest durch Falten eine Schachtel ohne Deckel mit grösstem Rauminhalt ergibt?

**Aufgabe 8.** Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck mit halber Basis $r$ und zugehöriger Höhe $h$. Welches einbeschriebene Rechteck hat maximalen Flächeninhalt?

**Aufgabe 9.** Gegeben ist ein gerader Kreiskegel mit Grundkreisradius $r$ und Höhe $h$. Welcher einbeschriebene gerade Kreiszylinder hat maximales Volumen? Vergleiche das Resultat mit jenem der Aufgabe 8 und kommentiere.

**Aufgabe 10.** Zwei Fahrzeuge $A$ und $B$ bewegen sich auf zwei verschiedenen geraden Strassen. Das Fahrzeug $A$ befindet sich zur Zeit $t$ im Punkt $(t-3|t)$, das Fahrzeug $B$ im Punkt $(2t|9-t)$.

a. Zeichne im $xy$-Koordinatensystem die beiden Strassen ein.

b. In welchem Punkt $S$ kreuzen sich die Strassen?

c. Wo befinden sich die beiden Fahrzeuge wenn ihr Abstand minimal ist, und wie viel ist dieser minimale Abstand?