Aufgaben zu D

D1 1. Welche der folgenden Funktionen sind *Polynomfunktionen*? Nenne allenfalls den Grad sowie die Koeffizienten:
a. $y = x^4$ b. $y = x^{-1}$ c. $y = x^2(x-1)$ d. $y = 2^x + x$ e. $y = \frac{1}{2}(x-2)^3 x^2$

2. Wie lässt sich das konstante Glied einer Polynomfunktion graphisch interpretieren? Wann genau geht der Graph einer Polynomfunktion durch den Ursprung?

3. Eine Polynomfunktion dritten Grades bezeichnet man auch als *kubische Funktion*. Wie lautet die Gleichung der kubischen Funktion, deren Graph durch den Ursprung und durch die Punkte $(1|0)$, $(-1|-2)$ und $(2|10)$ geht?

4. Wie verhalten sich die folgenden Polynomfunktionen für betragsmässig grosse x?
a. $f: y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ b. $f: y = -\frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3$

5. $f: y = \frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{10}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 4$, $g: y = \frac{1}{40}x^4$
a. Wir wissen: f und g haben für x gegen $\pm\infty$ den gleichen uneigentlichen Grenzwert. Welches ist der Grenzwert a. der Differenz $f(x) - g(x)$ b. des Quotienten $f(x)/g(x)$?
c. Stelle die Situation graphisch dar und kommentiere.

6. Bei welcher der nachfolgenden Polynomfunktionen verläuft der Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse, bei welcher symmetrisch bezüglich des Ursprungs?
a. $y = x^6 - 3x^2 - 3$ b. $y = x^3 + x - 4$ c. $y = -0.0001x^7 + 0.01x^3 + x$

D2 7. Leite ab: a. $y = 5x^6 - 3x^4 + 12x^3 + x$ b. $y = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3}x^4 + 8(x^2+2)x + 9$ c. $y = (x-1)^3$

8. Leite nach x bzw. t ab (n ist stets eine natürliche Zahl):
a. $y = px^3 + qx$ b. $y = ax + b$ c. $y = (r - t^2)(r + t^2)$ d. $y = (2t)^5 + 2t^5$ e. $y = (u^2 x)^4$
f. $y = \frac{1}{n+1}x^{2n+2}$ g. $y = x^n(x^n + x^{-n})$ h. $y = \left(kt^{n+1}\right)^2 + k^5 + k + t$

9. *Gleichmässig beschleunigte Bewegung*: $f: s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$
Berechne die erste und zweite Ableitung nach t und interpretiere physikalisch!

10. $f: y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 4$
Bei welchen Stellen hat Graph f die Steigung 1?

11. $f: y = 2x^3 - ax^2 + b$
Graph f hat im Punkt $(2|3)$ die Steigung 4? Berechne a und b.

12. $f: y = x^4 + x^3 - 5x + 6$
Wie lautet die Gleichung der Tangente von Graph f im Punkt mit der 1. Koordinate 1?

13. $f: y = 2x^3 + 3x^2 + 4$
In welchen Punkten von Graph f verlaufen die Tangenten parallel zur Geraden mit der Gleichung $y - 12x = 7$?

14. $f: y = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 3x$
Es sei t die Tangente an Graph f im Ursprung. Welchen weiteren Punkt S haben t und Graph f gemeinsam?

15. $f: y = -x^5 + 3x^4 - 18x + 24$
Wie lautet die Gleichung der Normalen von Graph f im Punkt mit der 1. Koordinate 2?

16. $f: y = x^3 + 3x^2 - 6x + 3$
In welchen Punkten von Graph f verlaufen die Tangenten senkrecht zur Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{3}x$?

17. $f: y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9$
   a. Bestimme die Extrempunkte.
   b. Bestimme den Wendepunkt und die Gleichung der Wendetangente.
   c. Skizziere Graph f. d. Bestätige anschliessend das Resultat mit dem TR.
18. $f: y = x^3 - px^2 + 5x + 7$
   Für welches p ist der Punkt mit der 1. Koordinate 3 Wendepunkt von Graph f?
19. $f: y = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$
   Graph f hat genau einen Punkt mit horizontaler Tangente. Berechne diesen Punkt. Um welche Art von Punkt handelt es sich dabei?
20. $f: y = 2x^3 + p, \quad g: y = 3x^2 + 4$
   Bestimme p so, dass sich Graph f und Graph g berühren.
21. $f: y = -x^2 + 6x, \quad g: y = \frac{1}{2}x^2$
   Um wie viel muss man Graph g in Richtung der y-Achse verschieben, damit er Graph f berührt?
22. $f: y = x^3 - 3x + p$
   Wie gross muss p sein, damit Graph f die x-Achse berührt?
23. $f: y = x^2 + px, \quad g: y = x^2 - \frac{1}{2}p$
   Bestimme p so, dass sich Graph f und Graph g senkrecht schneiden.
24. $f: y = \frac{1}{3}x^2$
   Eine Gerade geht durch 4.5 auf der y-Achse und schneidet Graph f im ersten Quadranten senkrecht in einem Punkt S. Berechne S.
25. $f': y' = 6x^2 + 2x + 5$
   a. Von welchen Funktionen f ist f' die Ableitung?
   b. Interpretiere das Resultat graphisch.
26. Der Graph einer Funktion f mit $f'(x) = 4x^3 - 2$ gehe durch den Punkt $(1|6)$. Wie lautet die Gleichung von f?
27. $y = ax^2 + bx + c$
   a. Berechne mit Hilfe der Ableitung die Koordinaten Scheitelpunktes der Parabel.
   b. Begründe mit Ableiten das Krümmungsverhalten der Parabel.

*28. In der Theorie (Seite 25) wurde erwähnt, dass bei den Sätzen über Extrem-, Wende- und Sattelpunkte die Implikationspfeile '⇒' nicht umgekehrt werden dürfen. Zeige dies mit Verwendung folgender Funktionen (Gegenbeispiele):
   a. $f: y = x^4$ b. $f: y = x^5 + x + 1$ b. $f: y = x^5$

D3 29. Der *Fundamentalsatz* der Algebra besagt, dass eine Gleichung n-ten Grades im Bereich der komplexen Zahlen mindestens eine Lösung hat. Hingegen kann im Bereich der für uns bekannten reellen Zahlen (sie bilden eine Teilmenge der komplexen) eine Gleichung n-ten Grades auch keine Lösung haben.
   a. Wann genau hat eine Gleichung 2-ten Grades keine Lösung?
   b. Nenne eine Gleichung 10-ten Grades, die keine Lösung hat.

30. Bei welchen der nachfolgenden Gleichungen kann man den Linearfaktor $x-2$, bei welchen $x+2$ abspalten? Versuche allenfalls weitere Linearfaktoren abzuspalten. Nenne die maximal mögliche Faktorzerlegung des Gleichungsterms und die Lösungsmenge der Gleichung.
   a. $x^3+2x^2-5x-6=0$ b. $x^4-3x^2-4=0$ c. $x^3-2x^2-4x+8=0$ d. $x^3-8=0$
   e. $(x^2-4)(x^6-x^4+x^2-1)=0$ f. $x^3+6x^2+12x+8=0$
   g. $x^6+x^4+x^2+1=0$ h. $x^4+2x^3-\sqrt{8}\,x-\sqrt{32}=0$

31. Nenne die Gleichung 3-ten Grades mit Höchstkoeffizient 5 und den drei Lösungen 3, $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ (Gleichungsterm ausmultipliziert angeben).

32. $x^4 + x^3 - x^2 - 3x - 6 = 0$
Beweise, dass $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$ die einzigen Lösungen dieser Gleichung sind.

33. Kann man bei einer Gleichung n-ten Grades denselben Linearfaktor $(x - x_0)$ genau k $(k \leq n)$ mal abspalten, so sagt man, die Lösung x_0 habe die *Vielfachheit* k. Ist speziell $k = 2$, so spricht man von einer *Doppellösung*. Bei den nachfolgenden Gleichungen ist eine Lösung mit ihrer Vielfachheit angegeben. Bestimme die maximal mögliche Faktorzerlegung des Gleichungsterms sowie die Lösungsmenge:
a. $x^4 - 13x^3 + 57x^2 - 95x + 50 = 0$ hat die Doppellösung 5.
b. $x^5 + 3x^4 - 7 = 4x^3 + 20x^2 + 21x$ hat die Lösung -1 mit der Vielfachheit 3.

34. Nenne die Gleichung mit möglichst kleinen ganzzahligen Koeffizienten, die zwei Lösungen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ besitzt, und zwar je mit der Vielfachheit 4.

35. Eine Gleichung 3-ten Grades ohne Lösung lässt sich nicht angeben. Dies wird klar, wenn man in der Nullgleichung anstelle von 0 die Variable y schreibt und das Verhalten für x gegen $\pm\infty$ der so resultierenden Funktion 3-ten Grades studiert. Auf diese Weise sollen zunächst die folgenden zwei Beispiele untersucht werden:
a. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ b. $-x^3 + x^2 + 2x = 0$
c. Formuliere den Sachverhalt mit Worten. Wie kann er verallgemeinert werden?

36. Wie viele Extrem- und wie viele Wendepunkte kann eine Polynomfunktion n-ten Grades höchstens haben?

*37. Wir betrachten zwei früher empirisch mit dem TR bestimmte Grenzwerte. Diese Grenzwerte lassen sich jetzt mit der Theorie über Gleichungen n-ten Grade bestimmen. Begründe die Vorgehensweise:
a. $\lim\limits_{h \to 2} \dfrac{x^5 - 32}{80x - 160}$ (Theorie Seite 6) b. $\lim\limits_{h \to \pm 2} \dfrac{x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$ (Aufgabe 2b, Seite 55)

D4 I 38. Diskutiere die folgenden Funktionen:
a. $f: y = 3x - x^3$ b. $f: y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^2$ c. $f: y = x^3 + 6x^2 + 9x$
d. $f: y = \frac{1}{4}x^5 - x^3$

39. $f: y = \frac{1}{12}(x^3 - 27x + 54)$
Die Funktion f hat, wie man nachrechnet, die Nullstelle -6. Diskutiere f. Die Symmetrie bzgl. des Wendepunktes lässt sich hier leicht beweisen. Man führe den Beweis.

II 40. Wie lautet die Gleichung der Polynomfunktion 3. Grades, deren Graph die x-Achse im Ursprung berührt und im Punkt $(2|4)$ eine Tangente mit der Steigung 20 besitzt?

41. Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades ist symmetrisch bezüglich der y-Achse und hat im Punkt $(2|0)$ eine Wendetangente mit der Steigung -8. Wie lautet die Funktionsgleichung?

42. Eine Polynomfunktion 3. Grades hat die Nullstellen 1 und -1. Ihr Graph schneidet die y-Achse bei 3 und weist dort eine fallende Gerade als Tangente auf, die mit den Koordinatenachsen einen 45°-Winkel einschliesst. Wie lautet die Funktionsgleichung?

43. Eine Polynomfunktion 5. Grades hat zwei Sattelpunkte, einen im Ursprung und den andern im Punkt $(1|1)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

44. Der Graph einer Polynomfunktion 5. Grades ist symmetrisch bezüglich des Ursprungs. Im Ursrung liegt eine horizontale Tangente vor. Ferner hat der Graph bei der Stelle -1 eine Wendetangente mit der Steigung 15. Wie lautet die Funktionsgleichung?

45. Der Graph einer Polynomfunktion 6. Grades ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. Im Ursprung liegt ein Flachpunkt vor, und im Punkt $(1|-1)$ eine Tangente, die senkrecht auf der Geraden mit der Gleichung $y=\frac{1}{2}x$ steht. Wie lautet die Funktionsgleichung?

III 46. $f: y=\frac{1}{4}x^3, \quad g: y=-x^2+3x$
Wie gross sind die Schnittwinkel zwischen Graph f und Graph g?

47. $f: y=x^7-x$
Graph g entstehe aus Graph f durch Spiegelung an der x-Achse. Unter welchem Winkeln schneiden sich die beiden Graphen?

48. $f: y=x^3+2$
Es sei g die Ursprungsgerade, welche Graph f berührt. Graph f und die Gerade g haben nebst dem Berührpunkt noch einen weiteren Punkt gemeinsam. Berechne den Schnittwinkel in diesem Punkt.

D

IV 49. Dem Abschnitt der Parabel mit der Gleichung $y=6-\frac{1}{4}x^2$, welcher oberhalb der x-Achse liegt, denke man sich ein Rechteck
a. grössten Umfangs, b. grösster Fläche einbeschrieben.
Berechne die beiden Maximalwerte.

50. Welche zwei positiven Zahlen mit der Summe 30 haben
a. das grösste Produkt, b. die kleinste Quadratsumme?

51. Wie hoch ist ein gerader Kreiskegel mit maximalem Volumen bei gegebener Mantelinie s?

52. $f: y=\frac{1}{8}x^3$
Graph f und seine Tangente im Punkt $(2|1)$ schliessen ein endliches Flächenstück ein. Wie viel misst die längste vertikale Strecke innerhalb dieses Flächenstücks?

53. Aus dem von den Koordinatenachsen und den Geraden $x=3$ und $y=6$ begrenzten Rechteck denke man sich das unterhalb der Parabel $y=3-x^2$ liegende Flächenstück weggeschnitten. Der Restfläche soll ein Rechteck mit einer Ecke in $(3|6)$ und mit grösstem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Wie gross ist der Inhalt dieses Rechtecks?

54. Welcher Quader mit quadratischer Grundfläche und gegebener Oberfläche S hat maximales Volumen?

55. Der Querschnitt eines Baumstammes sei ein Kreis mit Radius r. Aus diesem Stamm werde ein Balken mit rechteckigem Querschnitt herausgeschnitten. Aus der Statik weiss man, dass die Tragfähigkeit eines solchen Balkens ungefähr proportional ist zum Produkt aus seiner Breite b und dem Quadrat seiner Höhe h. Wie gross müssen b und h sein, damit der Balken grösste Tragfähigkeit aufweist.

56. Einer Kugel mit Radius $R=10\,\text{cm}$ sei ein gerader Kreiskegel mit maximalem Volumen einbeschrieben. Berechne den Radius r und die Höhe h dieses Kegels.

57. Ein Pyramidenzelt mit quadratischer Grundfläche soll aus vier Stäben mit je der Länge $s=3\,\text{m}$ gebaut werden. Wie hoch ist in der Mitte das Zelt, wenn sein Innenraum möglichst grosses Volumen haben soll?

58. Eine obene offene Wasserrinne mit maximalem Fassungsvermögen ist aus drei gleich grossen Brettern der Breite a herzustellen. Wie breit muss sie oben sein?

59. Wie gross ist die Grundkante a und die Höhe h der geraden quadratischen Pyramide mit der Oberfläche $S=36\,\text{m}^2$ und maximalem Volumen?

60. $f: y=\sqrt{-x^4+7x^2+9}$
Bestimme die extremalen Abstände, die Punkte von Graph f zum Ursprung haben.